

Teoría financiera: Aversión al riesgo en un modelo dinámico.¹*

Martí Oliva Fures

*Departamento de Teoría Económica.
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Universidad de Barcelona.
Avda. Diagonal, s/n - 08034 Barcelona*

El objetivo de este estudio estriba en caracterizar las secuencias de precios y tipos de interés de equilibrio, asociados a los distintos activos que se negocian en una economía de aversos al riesgo, donde existe un Mercado de Capitales, un Mercado de Emisión de títulos de deuda -Mercado Primario- y un Mercado Secundario en el que se negocian bonos a distintos plazos. La estructura a plazo de los tipos de interés surge como un resultado endógeno, en un marco dinámico, bajo incertidumbre; se demuestra que las primas por plazo existen, son v.a. antes de devenir realizaciones, y positivas y crecientes con el plazo. Se prueba que el Mercado de Capitales no será un "Mercado Eficiente": a pesar del supuesto de Expectativas Racionales, precios de acciones, ajustados por dividendos, serán, en cierta medida, predecibles. Con respecto a las interrelaciones que mantendrán en equilibrio precios de acciones con tipos de interés sobre bonos, se alcanza, utilizando procesos estocásticos de parámetro discreto, un resultado básico de la moderna Teoría Financiera: el riesgo de cualquier activo se tiene que considerar en relación a la covariabilidad de su rendimiento con la utilidad marginal del consumo. La "beta" de la Teoría de la Cartera y Mercado de Capitales de Sharpe-Lintner-Mossin pierde sentido en un contexto dinámico, una vez se admite que los inversores tienen un horizonte de planeación que se extiende más allá de un período. El parámetro relevante para preciar cualquier activo arriesgado deviene la "beta-consumo", que tiene en cuenta la medida apropiada del riesgo que comporta la tenencia de un título, que proporcionará un pago incierto a su tenedor al vencimiento, en un marco intertemporal. Todas las proposiciones seguirán siendo válidas incluso ante la presencia de activos no negociables o imperfectamente negociables -vg.: sujetos a costes de transacción significativos- en el sistema.

The purpose of this paper is to characterize the price's and interest's rates of equilibrium sequences, related with the different assets that are traded in an economy of risk-averse consumers, where there is a Capital Market, a Bond Market (Primary Market) and a Secondary Market where bonds with different maturity are negotiated. The term structure of interest rates is an endogenous result, in a dynamic frame show with uncertainty. I that there are term premiums and that they are r.v. before become actuals, and positive and growing with the term to maturity. I prove that the Capital Market won't be an "Efficient Market": notwithstanding the assumption of Rational Expectations, share's prices, adjusted for dividends, will be, to certain extent, forecastable. With regard to the interrelations that will maintain in equilibrium share's prices with bond's interest rates, I achieve, using stochastic processes of discrete parameter, a basic result of Modern Finance Theory: the risk of any asset need to be considered in relation to the covariability of its yield with the marginal utility of consumption. The Portfolio Theory and Capital Markets's "Beta", of Sharpe-Lintner-Mossin, loses meaning in a dynamic context, when it is admitted that the investors have a planning horizon longer than a period. The relevant parameter for pricing any asset becomes the "Consumption-Beta", which takes into account the appropriated measure of the risk for having an asset, that will provide an uncertain payment to his holder at its maturity, in a dynamic frame. All the propositions remain still valid, even if there are assets non-traded or imperfectly traded (subject to significative transaction cost) in the system.

* La segunda parte de este trabajo, en donde se infieren las conclusiones del modelo que aquí se presenta, se publicará en el próximo número de Cuadernos de Economía.

1. INTRODUCCION

El objetivo básico de este estudio estriba en caracterizar, bajo aversión al riesgo, las secuencias de precios y tipos de interés de equilibrio asociados a los distintos activos que se negocian en una economía ideal, donde existe un Mercado de Capitales, un Mercado de Emisión de títulos de deuda o Mercado Primario y un Mercado Secundario en el que se negocian bonos a distintos plazos.

Se alcanzarán proposiciones acerca de la estructura a plazo de los tipos de interés, sobre las secuencias de precios asociados a las acciones que se negocian en el Mercado de Capitales y con respecto a las interrelaciones que mantendrán en equilibrio, los precios de las acciones con los tipos de interés sobre bonos, a los distintos plazos en que sea permisible la operación de préstamo en la economía de referencia.

Con la introducción de una restricción adicional, los modelos propuestos devienen contrastables empíricamente y se pueden utilizar para la valoración de títulos o para comprobar la "eficiencia informacional" de los mercados.

El modelo de economía aquí diseñado supone una generalización de los previos de Cox, Ingersoll y Ross (81), Richard y Sundaresan (81), Breeden (79), Lucas (78), Leroy (73) y Grossman y Shiller (81), en cualquiera de los siguientes sentidos: el conjunto de oportunidades que cada período afronta el consumidor representativo de la economía de referencia es más amplio y/o preciso —acciones de distintas empresas, bonos a distintos plazos, ingresos por venta de servicios— que los elaborados por tales autores, y no se restringe por el transcurso del tiempo —lo cual es relevante en el caso de las obligaciones: se tienen que emitir bonos a largo cada período—.

La técnica empleada, cálculo de variaciones estocástico, es una novedad en el marco de la literatura financiera y brinda un cariz más realista que la habitual de cálculo estocástico en tiempo continuo.

2. DESCRIPCION DE LA ECONOMIA

En este apartado y en los tres siguientes, se efectuarán, de modo informal, los supuestos básicos que conformarán la economía de referencia.¹

Se supondrá que, en cada período de tiempo, existen dos conjuntos básicos de participantes, el de los consumidores, \underline{M} , y el de las empresas, $\underline{\theta} = \underline{J} \cup \underline{K}$, $\underline{J} \cap \underline{K} = \emptyset$,² y un solo bien de consumo, Q , no almacenable, consumido por los individuos o invertido por éstos vía empresas, donde es utilizado como input en los respectivos procesos de producción. Los precios de todas las mercancías del sistema se expresan en relación al bien de consumo subyacente. Se hablará indistintamente de unidades del bien de consumo (u.c.), de unidades de consumo y de cantidad de consumo.³ El bien de consumo homogéneo es fabricado a partir de dos tecnologías de producción básicas, TPJ y TPK; TPJ es la empleada por las empresas $j \in \underline{J}$ y TPK es la utilizada por las empresas $k \in \underline{K}$.

Se postulará que todos los mercados existentes en el sistema son perfectos: todas las mercancías son infinitamente divisibles; todas y cada una de las unidades económicas (u.ec.) actúan como precio-aceptantes en todos y cada uno de los mercados y tienen información sobre los precios corrientes de las distintas mercancías igual y sin coste; no existen costes de transacción —comisiones, impuestos sobre ventas— en la negociación de las mercancías en todos y cada uno de los mercados. Las transacciones se llevan a cabo mediante un proceso de *tatönnement* con recontractación y se hacen efectivas sólo a precios de equilibrio.

1. Para una descripción formal: Oliva (84 a).

2. Con el fin de evitar alguna posible confusión, denotaré a los conjuntos con letras mayúsculas. Otras características de la notación empleada: la formulación está conveniente numerada, con los números correspondientes apareciendo entre paréntesis, (.); las notas se simbolizan por (⁰); las referencias bibliográficas se citan entre paréntesis; las proposiciones que se derivan en este trabajo se numeran mediante caracteres en negrita: 0.

3. Un supuesto análogo lo realizan, v.g., Lucas (78) y Cox et al. (81).

3. MERCADOS PRIMARIO Y SECUNDARIO DE BONOS

Las empresas $k \in \underline{K}$ son de propiedad colectiva: $\underline{K} = \{k \mid k \text{ pertenece a } M\}$. Cada una de las empresas $k \in \underline{K}$ tiene un plazo de producción —tiempo que precisa $k \in \underline{K}$, para llevar a cabo el ciclo de producción completo mediante la tecnología TPK— de $s+1$ períodos. A este respecto, se definirá el conjunto de empresas \underline{K}_t :

$$(1) \quad \underline{K}_t = \{k \in \underline{K} \mid k \text{ inicia su ciclo de producción en } t\}$$

$$(2) \quad N(\underline{K}_t) = K^0, \text{ constante, } \forall t \in \underline{T}.^4$$

Como único input, las empresas $k \in \underline{K}$ emplean el bien Q y actúan bajo rendimientos constantes a escala estocásticos. La función de producción o conjunto de planes de producción técnicamente eficientes de la empresa $k \in \underline{K}$, $f_t^k(q_t^k) = \{q_{t+s+1}^k \text{ en } R^+ \mid q_{t+s+1}^k \text{ asociado a } -q_t^k \text{ en el conjunto de posibilidades de producción de la empresa } k \in \underline{K}\}$, se simbolizará, alternativamente, como:

$$(3) \quad f_t^k(q_t^k) = f^k(q_t^k, r_{t+s+1, t}) = q_{t+s+1}^k \cdot (1 + r_{t+s+1, t}) = q_{t+s+1}^k, \text{ donde:}$$

— $-q_t^k$ es la cantidad del input “bien de consumo”, Q , obtenido en el mercado de factores por $k \in \underline{K}$.

— $-q_{t+s+1}^k$ es el output que la empresa k aportará al mercado en $t+s+1$, fijo y conocido en t , período en que k inició el ciclo de producción correspondiente. $0 \leq q_{t+s+1}^k \leq \infty$.

— $t \in \underline{T}$, donde \underline{T} es el conjunto de todos los enteros. $T = \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$

— $r_{t+s+1, t}$ es el valor que toma en t la v.a. $r_{t+s+1, t}$ asocia intertemporalmente con TPK —bajo certeza en la producción todas las empresas $k \in \underline{K}_t$ utilizarán una tecnología de producción común, TPK_t , y $TPK = \{TPK_t, \forall t \in \underline{T}\}$,⁵ y representativa de un “shock” estocástico que influye en la productividad del input que la empresa k utiliza entre t y $t+s+1$ para llevar a cabo su producción. En t , $r_{t+s+1, t}$ es conocido, pero en $t-j$, $j \geq 1$, $r_{t+s+1, t}$ es una v.a. sujeta a una cierta distribu-

4. $N(\cdot)$: número de elementos del conjunto que aparece entre paréntesis.

5. Oliva (84a, p. 102-106).

ción de probabilidad. En un contexto intertemporal $\{r_{t+s+1,t}, t \in \underline{T}\}$ denotará un proceso estocástico, que se supondrá covarianza estacionario, ergódico y gaussiano y, de aquí, estrictamente estacionario y ergódico. El proceso estocástico de parámetro discreto, $\{r_{t+s+1,t}, t \in \underline{T}\}$, se define por: $\text{Prob}(r_{t+s+1,t} < -1) = 0$, y por sus:

a) Función de valor medio: $E(r_{t+s+1,t}) = v_k$ (4)

b) Función de autocovarianzas: $\text{Cov}(r_{i+s+1,i}, r_{j+s+1,j}) =$
 $= \sigma(i, j) = E(r_{i+s+1,i} \cdot r_{j+s+1,j}) - v_k^2 = \sigma(i-j) =$
 $= \sigma(h); \sigma(0) = \sigma_k^2; j, i \in \underline{T}.$ (5)

En $t, k \in \underline{K}_t$ emite $n^k = n/K^0$ títulos, n constante, $\forall t \in \underline{T}$, para obtener la financiación precisa para llevar a cabo su actividad productiva entre t y $t+s+1$. Tales activos se denominarán obligaciones o bonos; serán activos perfectamente divisibles, susceptibles de ser poseídos y almacenados por los individuos, que darán derecho a una participación en la producción que obtenga la empresa k en t , producción que será totalmente distribuida entre los tenedores de bonos de la empresa k en $t+s+1$. La empresa k entrega tales títulos a cada uno de los elementos $m \in \underline{M} \cap \underline{C} \underline{M}$, como contrapartida a la cesión realizada por \underline{M}' de q_t^k u.c. en t , en relación de estricta proporcionalidad a la aportación de u.c. que haya realizado cada $m \in \underline{M}'$ en t . Todos los bonos emitidos por \underline{K}_t , tendrán igual valor nominal.

Seguidamente, definiremos dos términos:

a) El rendimiento asociado a cualquiera de los n títulos emitidos por \underline{K}_t —los supuestos efectuados implican que se pueden tratar las K^0 empresas que inician su ciclo de producción en t como una sola— entre t y $t+s+1$, que viene expuesto implícitamente en (3):

(6) $r_{t+s+1,t} = (q_{t+s+1}^k - q_t^k) K^0 / q_t^k \cdot K^0, r_{t+s+1,t}$
fijo y conocido en t .

b) El precio, en u.c., de un bono emitido por \underline{K}_t

— en t : $u_t = q_t^k \cdot K^0 / n = q_t^k / n^k = b_{t+s+1} / (1 + r_{t+s+1,t})$ (7)

$$-- \text{ en } t+s+1: b_{t+s+1} = q_{t+s+1}^k \cdot K^0/n \quad (8)$$

Es decir, el consumidor que en t adquiere un bono, cede a $k \in K_t$ en dicho período u_t u.c. a cambio de b_{t+s+1} u.c. a recibir, con certeza, en $t+s+1$.

Por los límites impuestos a la producción de $k \in K$ y con $n > 0$:

$$0 \leq b_{t+s+1} \leq \infty, \forall k \in K, \text{ y } \forall t \in T. \quad (9)$$

Es decir, las obligaciones emitidas por la empresa $k \in K$ son títulos de responsabilidad limitada. El supuesto de certeza en la producción de las empresa $k \in K$, implica que $m \in M$ conocerá con certitud, entre t y $t+s+1$, b_{t+s+1} , el precio de una obligación emitida por la empresa $k \in K_t$, en el período $t+s+1$. Tal característica de los títulos emitidos por las empresas k , se denomina "carencia de riesgo de falta de pago".

Los rasgos definitorios de los bonos emitidos por K , ser títulos de responsabilidad limitada para el tenedor y la ausencia de riesgo de falta de pago, definen propiedades que poseen algunos de los activos financieros existentes en el mundo real —en particular, tales rasgos se han asociado generalmente, con los títulos emitidos por el Sector Público Central de los países desarrollados del bloque occidental—.

En la economía de referencia, existe un mercado secundario, donde se negocian cada período t , $\forall t$, los títulos emitidos por el conjunto de empresas de propiedad colectiva K_{t-h} , donde:

$$(10) \quad K_{t-h} = \{ K_{t-i} \mid i = 1, 2, \dots, s \}.$$

Tales títulos constituyen un vehículo para la instrumentación de préstamos sin riesgo de falta de pago entre las unidades económicas de consumo; como queda patente en (10), los plazos para los cuales tal mercado puede actuar, vienen limitados por los distintos vencimientos de los títulos emitidos en el Mercado Primario —MP— por K_{t-h} : la operación de préstamo sin riesgo de falta de pago —único contrato de crédito existente entre consumidores en nuestra economía simple— no está definido en $t \forall t$, para los plazos $t+j$, $j > s$.⁶

6. Se podría aducir que, en pureza, el MS está definido también en t para el período $t+s+1$, período al inicio del cual finaliza el proceso de producción de las empresas $k \in K_t$; luego, un consumidor podría comprar un bono de una de las empresas y , al mismo instante, solicitar un préstamo con la garantía del citado bono, a devolver en $t+s+1$. Pero la posibilidad de acudir al MP o de emisión está también abierta al prestamista potencial: en vez de adquirir el bono del consumidor, lo puede conseguir acudiendo directamente al MP. Aún bajo el supuesto de que no existan costes de transacción, si los consumidores no asocian ninguna satisfacción especial a la compra-venta de títulos y dado que no existe restricción al número de u.c. que un

En este Mercado Secundario —MS—, o Mercado de Préstamos sin riesgo de falta de pago, en t , $\forall t$, se define para cada plazo $t+i$, $i=1, 2, \dots, s$, el precio de una unidad de consumo actual, en términos de una unidad de consumo futuro y ello para cada uno de los períodos sucesivos, hasta un horizonte de s períodos, de acuerdo a las ofertas y demandas subyacentes de préstamos realizadas por los consumidores para cada uno de dichos plazos. Las u.ec. de consumo pueden solicitar —conceder— préstamos al plazo o combinación de plazos que deseen, de acuerdo al conjunto de precios vigentes en el MS en t , $\forall t$, en términos de renuncia —aumento— de consumo actual a cambio de consumo futuro, para cada uno de los plazos para los que está definida la operación de préstamo sin riesgo de falta de pago. El prestamista, $m^a \in M$, tiene una probabilidad igual a uno de que al vencimiento del préstamo obtendrá las u.c. acordadas en el contrato de crédito con el prestatario, $m^o \in M$, en t . El hecho de que una unidad de consumo actual se defina en términos de una unidad de consumo futuro, es otra forma de decir que en el MS los bonos emitidos por K_{t-h} se negocian al descuento en t , $\forall t$. Si $\underline{M}^o \subset \underline{M}$, $\underline{M}^o = \{m \mid m = m^o\}$, desea aumentar su consumo en el presente, t , en $x_t \cdot u_t$ u.c., venderá a $\underline{M}^a \subset \underline{M}$, $\underline{M}^a = \{m \mid m = m^a\}$, x_t bonos con vencimiento en $t+i$, $i=1, 2, \dots, s$, por valor de b_{t+i} u.c. en $t+i$ cada uno de los bonos con vencimiento en $t+i$, de forma que:

$$(11) \quad x_t \cdot u_t = \sum_{i=1}^s x_{t+i} \cdot b_{t+i} / (1+r_{t+i, t}) \quad \text{sujeto a:}$$

$$(12) \quad \sum_{i=1}^s x_{t+i} = x_t \quad ; \quad x_{t+i} \leq n, i=1, 2, \dots, s.$$

y donde x_{t+i} denota el número de bonos vendidos en t por \underline{M}^o con vencimiento en el período $t+i$, $i=1, 2, \dots, s$, y emitidos, por tanto, en el MP en $t-s-1+i$, $i=1, 2, \dots, s$.

La serie de tipos de interés que se definen en el MS en cada período t para los s períodos siguientes, $r_{t+i, t}$, $i=1, 2, \dots, s$, junto con el tipo de interés, $r_{t+s+1, t}$, que se realiza en el período t en el MP o de Emisión, conforman el vector fila:

.../...

consumidor puede colocar en bonos al plazo de $s+1$ períodos en el MP, se puede aceptar que ese plazo queda reservado al Mercado de Emisión o MP y que el MS no funcionará para el mismo.

$$(13) \quad (r_{t+1,t}, r_{t+2,t}, \dots, r_{t+s+1,t})'$$

Vector que se ha venido en llamar la Estructura a plazo de los tipos de interés: la relación existente entre rendimiento —variable dependiente— y plazo —variable independiente— para títulos de deuda comparables.⁷ La expresión habitual de la estructura a plazo se formaliza en base al tipo de interés por período para el período básico; es decir:

$$(14) \quad i_{t+j,t} = (r_{t+j,t})^{1/j} - 1, j = 1, 2, \dots, s+1$$

y la estructura a plazo en t :

$$(15) \quad (i_{t+j,t}, j = 1, 2, \dots, s+1)'$$

Aunque la formulación más conveniente es en términos de factores de descuento:

$$(16) \quad (w_{t+j,t}, j = 1, 2, \dots, s+1)', \text{ donde:}$$

$$(17) \quad w_{t+j,t} = 1/(1+r_{t+j,t}), j = 1, 2, \dots, s+1.$$

Mediante una sencilla operación matricial, se puede definir otro vector fila, ampliamente difundido en la literatura de la estructura a plazo:

$$(1/w_{t+1,t}, 1/w_{t+2,t}, \dots, 1/w_{t+s+1,t})' \cdot \begin{bmatrix} w_{t,t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{t+1,t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{t+2,t} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & w_{t+s,t} \end{bmatrix} =$$

$$-(1_t, 1_2, \dots, 1_{s+1})' = (f_{t+1,t}, f_{t+2,t}, \dots, f_{t+s+1,t})' \quad (18)$$

7. Filo, en la práctica, supone con riesgo de falta de pago nulo. El riesgo, por definición de Estructura a Plazo —títulos comparables: luego, con riesgo idéntico— tiene que permanecer constante para los distintos plazos a que se negocian títulos de deuda; pero, si no es cero, el riesgo es función del plazo (Henning et al. 81, c. 13; Polakoff & Durkin, 81, c. 23).

Vector fila cuyos elementos son los tipos de interés "forward" o implícitos en la estructura a plazo vigente en t .

En (18), por definición,:

$$r_{t+1, t} = f_{t+1, t} \quad ; \quad w_{t, t} = 1 \quad (19)$$

Para Roll (70, p. 16), "la importancia de los tipos forward yace en su interpretación económica: el tipo forward es el rendimiento marginal que se obtiene si se prolonga la inversión un período adicional".

La primera derivación de los tipos forward se debe a Keynes (36, c. 13) y la aportación más difundida en este campo se imputa habitualmente a Hicks: "si decidimos por un período mínimo de tiempo, despreciando los préstamos de menor duración, cada préstamo de cada duración se puede reducir a un modelo 'standard' —un préstamo para el período mínimo, combinado con una serie de renovaciones para los períodos subsiguientes de igual longitud, contratados forward" (Hicks, 46, p. 144-5).

Telser (67, 566-61) señala que "a veces la fórmula" implícita en el párrafo anterior de Hicks "se ha interpretado, erróneamente, como una mera tautología carente de sentido económico. Su valor depende de la posibilidad de que un individuo pueda comprar y vender bonos de cualquier vencimiento sin afectar los tipos. . . Para tener sentido debe ser posible llevar a cabo el arbitraje utilizado para derivar la fórmula. Si tal arbitraje es posible, no se esperaría que el tipo forward fuera negativo para cualquier plazo, aunque ello sería consistente con la aritmética de "la fórmula de Hicks. El arbitraje a que se refiere Telser consiste en que "si un prestamista desea, en t , pedir fondos por k períodos, a entregar en $t+n$ —y devueltos en $t+n+k$ —, puede emitir un bono que venza en $t+k+n$ y prestar los productos hasta $t+n$, mediante la compra de un bono con vencimiento en $t+n$. . . , lo que equivale a endeudarse por k períodos al tipo forward" correspondiente. Entonces la fórmula de Hicks —implícita en el párrafo anterior de este autor— y la nuestra, (18) representan el caso extremo de que el arbitraje se puede efectuar en la combinación de tipos forward a un período que se desee: todo sujeto tiene abierta la posibilidad de comprar y/o vender bonos a cualquier plazo, dentro del horizonte de planeación para Hicks, y bajo los límites impuestos por el funcionamiento del Mercado Primario en nuestro caso.

Nelson (72, p. 9) hace énfasis en el mismo punto: "mientras que los tipos forward se calculan siempre a partir de los tipos a largo observados, no constituyen, simplemente por definición, un tipo al que las transacciones forward puedan efectuarse. Tienen contenido económico sólo si la categoría de transacciones implicadas en su derivación son po-

sibles en el mercado. . . ; claramente muchos participantes en el mercado no son capaces de prestar y endeudarse en la misma estructura de tipos. Sin embargo, la posición forward de un tenedor de bonos, se puede modificar alterando simplemente la composición de vencimientos en su cartera. La última consideración presta plausibilidad adicional a la noción de transacciones forward en préstamos que tienen lugar en el mundo real". A partir de (18) "es claro que un vector de tipos a largo implica un conjunto de tipos forward y viceversa. Así se observa que una teoría de la determinación de unos implica la determinación de los otros" —tipos a largo y forward—.

Notemos que mientras en t , el vector $(r_{t+j,t}, j = 1, 2, \dots, s+1)$ deviene una realización, en $t-i, i \geq 1$, es un vector estocástico, cuyos elementos están sujetos a sus respectivas distribuciones de probabilidad. Entonces, se supondrá que los procesos estocásticos $r_{t+1,t}, \dots, r_{t+s+1,t}$ son conjuntamente covarianza estacionarios y gaussianos y, de aquí, conjuntamente estacionarios:

$$(20) \quad F(r_{t_1}^{(t+1,t)}, \dots, r_{t_k}^{(t+s+1,t)}) \equiv F(r_{t_1+h}^{(t+1,t)}, \dots, r_{t_k+h}^{(t+s+1,t)})$$

para cualquier conjunto finito de índices T_k y para cualquier h , tal que $T_k + h$ pertenezca a T (Nerlove et al., 79, c. 3).

4. MERCADO DE CAPITALES

Cada una de las empresas $j \in J$ es de propiedad privada: la empresa j pertenece al conjunto $M' \subset M$; la participación de cada individuo $m' \in M'$ en la propiedad de la empresa j depende de la proporción de su aportación, con respecto al total del capital de la empresa j . La empresa $j \in J$, tiene un plazo de producción de un solo período y para llevarla a cabo utiliza como única fuente de financiación, el capital aportado por sus accionistas al inicio del mismo. El capital de la empresa j en t iguala la suma de u.c. $(n.p_t^j)$ entregadas por sus socios—propietarios en ese instante, a cambio de ellas, $j \in J, \forall j$, emite n activos, perfectamente divisibles, que dan derecho a la totalidad de la producción que obtenga la empresa j en $t+1$ —final del plazo de producción iniciado en t —.

Cada una de las empresas $j \in J$ en $t, \forall t \in T$, para efectuar su producción cada período, utiliza una tecnología de producción secundaria $TPJS^j$ distinta a la empleada por cualquier otra empresa $j' \in J$ ($TPJS^j \neq TPJS^{j'}, \forall t \in T$, donde $TPJS^j$ es la tecnología de producción secun-

daria asociada biunívocamente en un marco intertemporal con la empresa j y $TPJS^j$, $TPJS^j \subset TPJ$).

Para llevar a cabo la producción, $j \in J$ utiliza dos inputs: Q , el bien de consumo básico, y C , "servicios alquilados a los consumidores", actúa bajo rendimientos constantes a escala estocásticos y es neutral al riesgo. El conjunto de planes de producción esperada técnicamente eficientes, $\bar{f}_{t+1}^j(\cdot, \cdot) = E(f_{t+1}^j(\cdot, \cdot))$, asigna un solo valor del output a cada combinación de las cantidades de inputs y se denotará por cualquiera de las siguientes expresiones:

$$(21) \quad n \cdot E(p_{t+1}^j + d_{t+1}^j) = E(f_{t+1}^j(q_t^j, \zeta_t^j)) = E(f^j(q_t^j, \zeta_t^j, r_{t+1}^j)) = \\ = n \cdot E(p_t^j \cdot (1 + r_{t+1}^j)) = n \cdot p_t^j \cdot (1 + E(r_{t+1}^j)) \quad , \quad y$$

$$(21') \quad \text{Prob}(r_{t+1}^j < -1) = 0 \quad ; \quad \text{Con:}$$

$$\phi_t \cdot \zeta_t^j + 1 \cdot q_t^j = n \cdot p_t^j \quad ,$$

siendo ϕ_t y 1 los precios de los inputs C y Q , respectivamente, en el período t . Y donde:

— p_t^j : precio de una acción de la empresa j en t .

— q_t^j , ζ_t^j : cantidades de inputs "bien de consumo" y "servicios alquilados a los consumidores", utilizados por la empresa j para llevar a cabo la producción que aportará al mercado en el período siguiente. Parte de la financiación total de que dispone la empresa, lo destina a su utilización directamente como input en el proceso de producción, el resto, $n \cdot p_t^j - q_t^j$, va dirigido a la contratación y pago de servicios al conjunto $\underline{M}^j \subset \underline{M}$, en el mercado que se abre cada período a tal efecto. Mientras los servicios se contratan y pagan al principio de t , $\forall t$, por cada una de las empresas j a los componentes de sus respectivos conjuntos \underline{M}^j , éstos realizan las prestaciones comprometidas en el plazo que transcurre entre el inicio del período t y el principio del período siguiente. Los servicios son ofertados discrecionalmente por los consumidores presentes en el sistema.⁸

8. No concretaré más el tipo de servicios que los consumidores ofertan a las empresas $j \in J$ y que interviene como input en el proceso productivo de éstas; entre los objetivos de mi estudio no incluyo el análisis de la elección ocio-consumo.

r_{t+1}^j : "shock" estocástico que afecta a la productividad de los factores empleados por la empresa j en el período t . Cada TPJS^j se caracteriza por un determinado factor aleatorio r_{t+1}^j , de modo que existe una relación biunívoca, en el contexto intertemporal, entre la empresa j y el "shock" estocástico $\{r_{t+1}^j; t \in \underline{T}\}$ (donde —de forma abreviada— $\{r_{t+1}^j\}$ denota un vector infinito, serie temporal discreta o proceso estocástico de parámetro discreto). Con ello se quiere indicar que si $j \neq j'$, $j, j' \in \underline{J}$, entonces se verificará: $\text{Prob}(r_{t+1}^j = r_{t+1}^{j'}) = 0$, $\forall t \in \underline{T}$.⁹ Se supondrá que los procesos estocásticos o variables aleatorias multivariantes $(r_{t+1}^{j(1)}, \dots, r_{t+1}^{j(J)})$ son conjuntamente covarianza estacionarios, ergódicos y gaussianos.¹⁰

— $n \cdot (p_{t+1}^j + d_{t+1}^j)$: output que la empresa j aportará al mercado en $t+1$ y que en t será una v.a. —con distribución normal, a partir de los supuestos efectuados en el párrafo anterior—. Tal v.a. tendrá su rango de variación efectivo —tiene que ser normal— en $(0, \infty)$, lo que se deduce de la existencia de equilibrio, cada período en los distintos mercados del sistema y de (21'). El output de j en $t+i$ —igual a beneficios, totalmente distribuidos—, $i > 0$, es, por tanto, estocástico en t y con un campo de variabilidad limitado por su lado izquierdo. De aquí se sigue que:

a) Las acciones de la empresa j , $\forall j \in \underline{J}$, $\forall t \in \underline{T}$, son títulos de responsabilidad limitada para el tenedor —en la terminología de Merton (73, p. 868)—.

b) Las acciones de la empresa $j \in \underline{J}$, están sujetas al riesgo de falta de pago.

9. Dos v.a. X_n y X se dice que son iguales casi seguramente si: $\text{Prob}(X_n \neq X) = 0$. Este tipo de convergencia se denomina convergencia casi cierta (c.c.), convergencia con probabilidad uno y convergencia en todas partes (Thomas, 71, p. 183).

10. Existen discrepancias de matiz en la literatura al respecto de las relaciones existentes entre procesos estrictamente estacionarios y covarianza estacionarios: algunos autores —Priestley (81), Granger & Newbold (77), Nerlove et al. (79)— suponen implícitamente que la media y la varianza de todos los procesos a que se refieren, existen: los estrictamente estacionarios serán un subconjunto de los covarianza estacionarios. Otros —O'Flynn (82), Thomas (71)— aceptan que las v.a. que conforman el proceso de interés pueden no tener definidos sus momentos v.g. un proceso estocástico que consiste de una secuencia de v.a. Cauchy independientes e idénticamente distribuidas: el proceso es completamente estacionario, pero al no existir sus momentos conjuntos, no se puede decir que sea estacionario de ningún orden—, con lo cual la estacionariedad estricta de un proceso no implicará que el proceso sea estacionario de orden dos o covarianza estacionario o débilmente estacionario. Pero "este es un ejemplo altamente patológico y, sujeto a la existencia de los momentos, un proceso estrictamente estacionario es, de hecho, estacionario hasta cualquier orden" (Priestley, 81, p. 112-3), y, por tanto, covarianza estacionario.

(a) y (b) son características que poseen los títulos emitidos por las modernas sociedades del mundo real, que incorporan derechos de propiedad sobre las mismas.

Notemos que bajo el postulado de normalidad, el supuesto señalado con (21'), quiere expresar que la media de la v.a. r_{t+1}^j , v_j , es lo suficientemente grande comparada con su desviación típica, σ_j , como para que la probabilidad de que la v.a. r_{t+1}^j tome un valor menor a -1 sea nula.¹¹ De hecho la investigación empírica en los mercados de capitales desarrollados, sugiere que los tipos de rendimiento son extracciones a partir de una distribución de probabilidad que posee sesgo positivo (Francis & Archer, 79, p. 331) o incluso que provienen de distribuciones de probabilidad con parámetros que varían a lo largo del tiempo (Merton, 82, p. 21-5). Una razón que se ha dado para la existencia de tal sesgo es, justamente, que los tipos de rendimiento sobre títulos de responsabilidad limitada, tienen un campo de variación restringido por su lado izquierdo $-(21')$ — en el valor -1 —permiten ganar más del 100% del importe de la inversión original, pero no permiten una pérdida superior al 100%—. Las soluciones aportadas por los teóricos del Mercado de Capitales han consistido en suponer que el tipo de rendimiento tiene una distribución logarítmico-normal o una distribución paretiano-estable no normal.¹² Aquí se ha supuesto que r_{t+1}^j es una v.a. normalmente distribuida, básicamente por motivos de claridad de exposición: postular que tiene una distribución log-normal origina un modelo empíricamente indistinguible (Granger, 72)¹³ y, por otra parte, las distribuciones del tipo Pareto-Levy presentan el inconveniente de no tener definidos sus momentos (Fama, 76, p. 26) —la propiedad de varianza infinita que poseen las distribuciones estables no gaussianas implica que los instrumentos estadísticos habituales, basados en supuestos sobre la finitud de los momentos (v.g.: mínimos cuadrados) dejan de ser útiles y, por tanto, se tiene que recurrir a contrastaciones empíricas no paramétricas (Roll, 70) de menor potencia que las usuales, basadas en la normalidad de las v.a.; el hecho de que no exista el primer momento de la distribución implica incluso inconvenientes teóricos (¿qué medida de tendencia central utilizan los inversores para formarse sus expectativas sobre el rendimiento más probable a obtener de la inversión en un título determinado?)—. Además, los trabajos empíricos han aportado su contribución, cuestionando la estabilidad de la distribución, llevando al abandono de la hipótesis estable-paretiana (Merton, 82, p.

11. Este supuesto se ha realizado, implícita o explícitamente en multitud de ocasiones —Tobin (58), Fama & Miller (72), Fama (76), Sargent (79), . . .—.

12. Oliva (84b).

13. Oliva (84a, p. 42-60).

21): por definición, las distribuciones estables son invariantes bajo la operación de adición; los tipos de rendimiento continuos sobre un determinado período de tiempo pertenecen a la misma distribución que los obtenibles —sobre el mismo instrumento— durante un lapso temporal múltiplo del anterior; pero los datos han llevado a concluir que las distribuciones de probabilidad de los rendimientos sobre plazos distintos son, a su vez, distintas, tal como ha reconocido uno de los iniciadores de la hipótesis estable—paretiana (Fama, 76, p. 27) —los mismos datos que, en principio, brindaron plausibilidad a la hipótesis: tanto las distribuciones empíricas de rendimientos como las estables no normales son leptocúrticas—. ¹⁴

5. SERVICIOS. DECISIONES, TRANSACCIONES Y USO DE RECURSOS. CONSUMIDORES

5.1. *Servicios*

Hemos indicado en 4 que al inicio de cada período t , $\forall t \in \underline{T}$, $m \in \underline{M}$, contrata la venta de servicios — C — a las empresas $j \in \underline{J}$. El pago lo recibe al inicio de t y el cumplimiento del contrato —la entrega o ejecución de los servicios pactados— lo efectúa gradualmente durante el lapso temporal que transcurre desde el inicio del período t al comienzo del período $t+1$. Ello $\forall t$.

Los servicios son ofertados cada período por los consumidores a su discreción. Tales servicios constituyen un bien para $m \in \underline{M}$; le proporcionan satisfacción; el consumidor típico, para la obtención de un dado nivel de ingresos, prefiere vender menos a más unidades del bien “servicios”. La fuente del bien servicios sólo se agota con la extinción del consumidor; mientras $m \in \underline{M}$ tenga vida podrá vender servicios a las empresas $j \in \underline{J}$. El número de unidades del bien C que m tiene disponible, cada período, para su venta a las empresas $j \in \underline{J}$, fluctúa estocásticamente y viene determinada de forma exógena al inicio del mismo.

Se postula que el mercado del bien C está en equilibrio cada período; el equilibrio se alcanza, como es habitual, por la igualdad de oferta

14. Mandelbrot (63) y Fama (63) fueron los primeros en cuestionar la hipótesis de normalidad de los rendimientos sobre títulos; indicaron que los argumentos basados en el Teorema Central del Límite, como los propugnados por Bachelier (1900) y Osborne (59) no conducían únicamente a la distribución normal (Cootner, 64, p. 189–98); en particular, si las distribuciones de sus sumas de variables —rendimientos mediante composición continua de intereses—, aproximan una distribución límite a medida que el número de sumandos se incrementa, entonces la distribución límite debe ser un miembro de la clase de distribuciones estables, de las cuáles la normal es un caso especial.

y demanda agregadas para el bien objeto de contratación. Se supondrá que, cada período, el número de unidades del bien servicios de equilibrio, que \underline{J} contrata a \underline{M} , coincidirá con la oferta total disponible para el período.¹⁵

5.2. Decisiones, transacciones y uso de recursos

Las decisiones de consumo e inversión por los individuos y las de producción y pago por el uso de factores productivos alquilados a los consumidores, en el caso de las empresas $j \in \underline{J}$, se toman al principio de cada período. El pago que efectúan las empresas $j \in \underline{J}$ a sus accionistas y las empresas $k \in \underline{K}$ a sus obligacionistas, tiene lugar al inicio del período en que la empresa respectiva finaliza su plazo de producción. Las devoluciones de préstamos entre consumidores tienen lugar, asimismo, al comienzo del período acordado en el contrato —final del plazo del crédito—.

El bien de consumo es utilizado gradualmente durante cada período sin posibilidad de variar su asignación una vez las decisiones han sido tomadas y las transacciones realizadas en los distintos mercados existentes en el sistema.¹⁶

5.3 Consumidores

Se supondrá que en la economía de referencia cada período $t \in \underline{V}$, existen $M = n$ consumidores idénticos.¹⁷ Caracterizaremos al consumidor representativo en tres vertientes:

I) Horizonte temporal, vida o plazo de planeación: se supondrá infinito.¹⁸ Alternativamente se puede considerar un sistema en que ca-

15. El conjunto de supuestos es, evidentemente, restrictivo, pero deseo hacer énfasis en que el problema de la elección ocio—consumo no es objeto de este trabajo.

16. Hakansson (70) efectúa un supuesto análogo.

17. El supuesto de que el número de consumidores que operan cada período en la economía de referencia coincide con el número de acciones que emite cada una de las empresas de propiedad privada y con el número de bonos que pone en circulación, cada período, el conjunto de empresas de propiedad colectiva que empiezan su actividad en ese instante, no es restrictivo y simplifica de modo notable la notación —como ya fue apuntado por Ohlson (77) en otro contexto—.

18. “Existe un grado de arbitrariedad inevitable en los modelos que especifican un horizonte de longitud determinada” (Koopmans, 80, p. 117), pues, en un modelo este tipo, se pueden representar los intereses de los consumidores más allá de dicho período haciendo que todo bien disponible en dicho momento sea deseable; pero si el modelo se diseña para estudiar la maximización conjunta de los niveles de satisfacción en todos los períodos del horizonte, “no resulta del todo convincente que existan objetos a maximizar posteriormente que no sean niveles de satisfacción, sino meras cantidades de bienes: el peso relativo que se atribuya a la maxi-

da consumidor tiene un solo heredero, que empieza a actuar en los distintos mercados cuando desaparece su predecesor y una función de utilidad en la que se incluye la herencia como argumento (Oliva, 84a, c.5).

II) Expectativas Racionales.

III) Función de utilidad: Se postula que cada sujeto, al inicio de cada período t , maximiza el valor esperado condicional al conjunto de información corrientemente disponible, de una función de utilidad Von Neumann Morgenstern independiente del estado y cuyo argumento son las secuencias de bienes reales, C y \bar{C} , disponibles a lo largo de su vida:

$$(22) \quad \text{Max } E_t (G(c, \bar{c})) \quad \text{donde:}$$

Max: operación de maximización; E : operador de valor esperado; G : Función medible (Fama, 72) o cardinal (Koopmans, 80, p. 169); c, \bar{c} : vectores programa de consumo y de servicios disponibles —no contratados—, respectivamente; I_t : conjunto de información disponible en t , en base al cual se toma la esperanza matemática de la función $G(c, \bar{c})$.¹⁹

Es decir, caracterizamos el problema que enfrenta m , como realizar una decisión de consumo—inversión en ∞ puntos discretos a lo largo de su vida. Se define una consecuencia o resultado final como un par de secuencias completas de flujos de consumo y “servicios disponibles”, c, \bar{c} . El individuo toma las decisiones secuencialmente a lo largo de su vida, “a la luz de una acumulación creciente de información: ello se introduce en el modelo interpretando una decisión como una estrategia que especifica la acción a tomar en cada una de las contingencias futuras, a medida que éstas se van manifestando” (Koopmans, 80, p. 173). Una acción o regla de decisión será una estrategia para ∞ períodos que origina una distribución de probabilidad para distintas secuencias posibles de flujos de consumo y “servicios disponibles” sobre la vida de cada $m \in M$ —notemos que todo sujeto, cada período t puede rediseñar las estrategias definidas en períodos previos—. El sujeto encara un conjunto de alternativas —algunas de las cuales están disponibles con certeza, mientras que otras constituyen combinaciones de probabilidad de las alternativas ciertas— que incluye todas las alternativas relevantes pa-

.../...

mización de estas últimas dependerá de la capacidad de los bienes en cuestión para satisfacer a los consumidores más allá del horizonte” (Koopmans, 80, p. 117). Tal arbitrariedad se evita estudiando modelos con horizonte infinito, “que constituyen una idealización útil, como la diferenciabilidad de una función de producción” (Koopmans, 80, p. 117).

19. Como se observará en las páginas siguientes, el conjunto de información I_t es una σ -álgebra. Ver Malliaris y Brock (82, c. 1).

ra la decisión que tiene que tomar el consumidor. m ordena las consecuencias o resultados finales de sus acciones y las combinaciones de probabilidad de dichas consecuencias de acuerdo a los axiomas de elección racional de Von Neumann–Morgenstern. Recordemos que el Teorema de la utilidad esperada²⁰ tiene como corolario la “Hipótesis de la Utilidad Esperada” o regla de actuación racional para tomar decisiones en condiciones de riesgo (Fama & Miller, 72, p. 190): cuando m enfrenta un conjunto de acciones —estrategias sobre ∞ períodos—, mutuamente excluyentes, cada una de las cuales comporta una distribución de probabilidad de consecuencias determinada, el sujeto se comporta “como si” asignara números —utilidades— a cada consecuencia y entonces elige la acción cuya distribución de probabilidad de resultados finales le proporciona la máxima utilidad esperada; el consumidor, para maximizar la utilidad, elige la acción que maximiza la utilidad esperada (Fama & Miller, 72, p. 190; Intriligator, 71, p. 162).

Se supondrá que la función de utilidad, $G(\cdot, \cdot)$ es una función monótona creciente y continuamente diferenciable de cada uno de los elementos componentes de los vectores c y ζ , $c_i, \zeta_i \in \mathbb{R}^+$, $i = 0, 1, 2, \dots, \infty$; $G_1, G_2 > 0$. Continuatamente diferenciable, al menos dos veces en cada uno de sus argumentos correspondientes al vector c —es decir, las derivadas parciales segundas de la función $G(\cdot, \cdot)$ con respecto a c existen y son contínuas— y estrictamente cóncava en c . O sea, m presenta aversión al riesgo en su función de utilidad multiperíodo en relación al programa de consumo para el resto de su vida; de aquí se sigue que el individuo se comportará como un averso al riesgo con respecto al consumo de cualquier período i , $i = 0, 1, 2, \dots, \infty$: $\partial^2 G(\cdot, \cdot) / \partial c_i^2 < 0$ (Oliva, 84a, p. 124-5).

En cuanto a su comportamiento intertemporal, se postulará que el consumidor representativo de la economía de referencia se ajusta a los siguientes puntos:

i) Neutralidad intertemporal con respecto al riesgo en relación al programa de consumo para el resto de su vida —en la terminología de Rubinstein, 76a, p. 558—: la utilidad marginal del consumo en cualquier fecha es independiente del consumo en todos los otros períodos. Análogamente para el vector de “servicios disponibles”, ζ . $m \in \underline{M}$ será intertemporalmente neutral al riesgo en c si, frente a un par de programas de consumo y “servicios disponibles”, x e y , tales que sólo difieren en los flujos de consumo que proporcionarán —aleatoriamente— en dos

20. Teorema de la Utilidad Esperada: Existe un operador o función de utilidad, definido en el conjunto de alternativas posibles, tal que: (a) es fiel —preserva el orden—, (b) es lineal, (c) está definido salvo una transformación lineal positiva (Intriligator, 71, p. 161).

períodos del horizonte de planeación del consumidor, $c_i, c_{i+h}, h \neq 0$, $x = (\dots; (a_i, b_{i+h}; 1/2), (b_i, a_{i+h}; 1/2); \dots)$, $y = (\dots; (a_i, a_{i+h}; 1/2), (b_i, b_{i+h}; 1/2); \dots)$, es indiferente entre ambos. Es decir, existe: $G'(g^0(c_0, \zeta_0), \dots, g^i(c_i, \zeta_i), \dots) = G(c, \zeta)$, tal que:

$$(23) \quad \partial G(\dots)/\partial c_i = \partial g^i(\dots)/\partial c_i \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$(23') \quad \partial G(\dots)/\partial \zeta_i = \partial g^i(\dots)/\partial \zeta_i \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

ii) Separación de las actitudes —preferencias— con respecto al tiempo—impaciencia humana (Fisher, 30, p. 66–7, 81–9)— y con respecto al riesgo:

$$(24) \quad (\partial G(\dots)/\partial s_i)/(\partial G(\dots)/\partial s_{i-1}) = a_i \quad ; \quad s = c, \zeta \quad ; \quad i = 1, 2, \dots$$

Una condición necesaria y suficiente para que cumplan los supuestos (i) e (ii) es que exista una función $g(\dots)$ y una secuencia de constantes positivas a_i , tal que:

$$(25) \quad G(\dots) = \sum_{t=0}^{\infty} g(c_t, \zeta_t) \cdot \prod_{i=0}^t a_i \quad ; \quad a_0 = a^0$$

Donde las a_i constituyen una medida de preferencia temporal: expresan la preferencia relativa del individuo por flujos de consumo y/o “servicios disponibles” correspondientes a períodos distintos. Además, los supuestos (i) e (ii) implican que la función de utilidad intertemporal de $m \in \underline{M}$, tiene la forma expuesta por la expresión (25) (Long, 72, p. 166–7). Por otra parte, la supuesta aversión al riesgo del consumidor representativo con respecto al vector c , evita la concentración excesiva de consumo en un solo período.

iii) Se supondrá también: $a_i = a$, para $i = 1, 2, \dots$. La función de utilidad intertemporal de m con un factor subjetivo de descuento constante:

$$(26) \quad G(\dots) = \sum_{t=0}^{\infty} a^t \cdot g(c_t, \zeta_t) \quad ; \quad a \in (0, 1)$$

iv) Para asegurar una solución interior al problema intertemporal del individuo típico, supondremos que se verifican las condiciones de Inada:

$$(27) \lim_{c_t \rightarrow 0} (\partial g(\cdot, \cdot) / \partial c_t) = \infty; \quad \lim_{c_t \rightarrow \infty} (\partial g(\cdot, \cdot) / \partial c_t) = 0; \quad \forall t \in \underline{T}.$$

6. LA FUNCION OBJETIVO. EL CONJUNTO DE OPORTUNIDADES DE LOS CONSUMIDORES. EQUILIBRIO. EL MODELO DE MERCADO

6.1. La función objetivo

A partir de 5.1. ζ_t es cada período un parámetro, $\zeta_t = 0, \forall t$, pues se ha supuesto que los consumidores venden la totalidad de "servicios" de que disponen a las empresas j en cada uno de los instantes de tiempo $t \in \underline{T}$. De 5.3.II., se sigue que tal circunstancia es conocida por los consumidores. Luego, existirá (Azariadis, 75; Sargent, 79, c. 8):

$$(28) \quad U(c_t) = g(c_t, \zeta_t), \quad U' > 0, \quad U'' < 0.$$

De (22), (26) y (28), la función objetivo del consumidor representativo de la economía de referencia se escribirá:

$$(29) \quad \text{Max } E_t \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot U(c_h) \right) \quad ; \quad a \in (0, 1) \quad ; \quad h = t + k$$

Donde se ha considerado situado al consumidor representativo de la economía de referencia en el período t .

En t , la ecuación de presupuesto del consumidor representativo se escribirá:

$$(30) \quad y_t + \sum_{i=1}^J z_{t-1}^j \cdot (p_t^j + d_t^j) + \sum_{i=0}^s x_{t-1, t+i} \cdot b_{t+i} \cdot w_{t+i, t} =$$

$$= c_t + \sum_{j=1}^J z_t^j \cdot p_t^j + \sum_{i=1}^{s+1} x_{t, t+i} \cdot b_{t+i} \cdot w_{t+i, t}$$

Donde el primer miembro expresa la composición de los recursos de m al "entrar" en el período t y el segundo el nivel escogido de consumo para el período y la nueva cartera que decide mantener al inicio del mismo —y hasta el comienzo del siguiente, momento en que se volverán a abrir los distintos mercados del sistema—. En (30):

$$(31) \quad y_t = \left(\sum_{j=1}^J \tilde{c}_t^j \cdot q_t^j \right) / n$$

son los ingresos por venta de servicios a las empresas j que m obtiene al inicio del período t . Será una variable no controlable, una vez se tiene en cuenta que se ha supuesto que, cada período, m contrata la oferta total de servicios, que ésta es una v.a. en $t-j$, $j > 0$, $\forall t$, y que el precio de aquéllos se fija en el mercado, por las fuerzas de oferta y demanda,

cada período. De otro modo, la variable de control, $\left(\sum_{j=1}^J \tilde{c}_t^j \right) / n$, número de unidades de "servicios" que m vende a J en t , se ha supuesto

determinada exógenamente y estocástica.²¹ Por otra parte, en t , y_t es un dato; $\left\{ y_{t-j} \right\}_{j=0}^{\infty}$ describirá la secuencia de realizaciones del proceso estocástico $\{y_t\}$.²²

z_t^j : número de acciones de la empresa j que m decide mantener en su cartera en t .

$x_{t, t+i}$: número de bonos con vencimiento en $t+i$ que el consumidor elige en t que formen parte de su patrimonio. $i = 1, 2, \dots, s+1$.

b_{t+i} : valor nominal —al vencimiento— de cada uno de los bonos con vencimiento en $t+i$, que se ha supuesto, en 3, un dato en $t+j$, $j = 0, 1, \dots$; b_t hace referencia a determinado número de u.c. disponibles en t .

Haciendo:

$$(32) \quad v_{t, t+i} = x_{t, t+i} \cdot b_{t+i}$$

21. Se puede considerar que y_t simboliza los recursos procedentes de activos no negociables o imperfectamente negociables, en sentido amplio. "Esta extensión es importante, . . . pues (i) el capital humano no puede ser negociado, sino que proporciona flujos inciertos, (ii) otros activos, tales como la vivienda, . . . (que no cumplen con el supuesto de divisibilidad perfecta), sólo pueden negociarse bajo costes de transacción significativos. . ." (Grossman & Shiller, 82, p. 196).

22. Que implícitamente supongo predecible en cierta medida, aunque estocástico.

= valor nominal, en u.c., del conjunto de bonos con vencimiento en $t + i$, $i = 1, 2, \dots, s+1$, que el consumidor decide mantener en su cartera en t . Número de u.c. invertidas en bonos con vencimiento en $t + i$.

Con m situado en t , a partir de (30) y (32) y definiendo $h = t + k$, se obtiene:

$$(33) \quad c_h = y_h + \sum_{j=1}^J (z_{h-1}^j - z_h^j) \cdot p_h^j + \sum_{j=1}^J z_{h-1}^j \cdot d_h^j + \\ + v_{h-1, h} + \sum_{i=1}^s (v_{h-1, h+i} - v_{h, h+i}) \cdot w_{h+i, h} - \\ - v_{h, h+s+1} \cdot w_{h+s+1, h} \\ k = 0, 1, \dots, \infty \quad ; \quad t+k = h.$$

(33) indica la secuencia de restricciones que enfrenta el consumidor representativo de la economía de referencia a lo largo de su vida.

6.3. Equilibrio de mercado

Hay dos tipos de condiciones que definen el equilibrio de mercado (Richard & Sundaresan, 81):

i) Cada uno de los mercados existentes en el sistema tienen que estar en equilibrio cada período —Oferta = Demanda, en cada uno de ellos, $\forall t$ —. En una economía de idénticos consumidores estas condiciones son inmediatas.

El consumo de m en h ($v = b$, $z = 1$, en equilibrio en (33)):

$$(34) \quad c_h^* = y_h + \sum_{j=1}^J d_h^j \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, \infty; \quad h = t + k.$$

Su ahorro:

$$(35) \quad s_h^* = -y_h + b_{h+s+1} \cdot w_{h+s+1, h} + \sum_{j=1}^J p_h^j \quad ;$$

$$k = 0, 1, \dots, \infty; h = t + k.$$

(34) y (35) igualarán la producción total del bien Q en h , $k = 0, 1, \dots$ asignada a cada consumidor:

$$(36) \quad \phi_h^* = b_h + \sum_{j=1}^J (p_h^j + d_h^j);$$

$$h = 0, 1, \dots, \infty; h = t + k.$$

Es decir, oferta y demanda del bien de consumo se igualarán cada período. Es evidente que, en una economía de consumidores idénticos, el Mercado Secundario de Bonos, aunque existirá —por hipótesis— no entrará en funcionamiento; el volumen de préstamos, para los distintos plazos, con garantía de bonos sin riesgo de falta de pago, será nulo, en $k = 0, 1, \dots$. “En una economía de consumidores idénticos, la autarquía es un óptimo de Pareto” (Richard & Sundaresan, 81, p. 353). Cada período, m adquirirá un bono emitido en el MP por las empresas de propiedad colectiva y una acción de cada una de las empresas de propiedad privada, cuyo precio en u.c. será:

$$(37) \quad \psi_h^* = s_h + y_h; k = 0, 1, 2, \dots; h = t + k.$$

La cartera de títulos de m :

$$(38) \quad \ddot{\psi}_h^* = \psi_h + \sum_{i=1}^s b_{h+i} \cdot w_{h+i, h}; k = 0, 1, \dots, \infty; h = t + k$$

Bajo el supuesto de consumidores idénticos, las secuencias de flujos de consumo del consumidor representativo (34) se cumplirán verdaderamente ex-post. Y, en la economía de referencia, se ha efectuado el supuesto necesario para que coincidan con las esperadas por m en períodos previos para los instantes subsiguientes:

ii) Los consumidores tienen expectativas racionales: “Las distribuciones de probabilidad subjetivas de los individuos que describen resultados futuros son idénticas a las correspondientes distribuciones de probabilidad objetivas, condicionales al verdadero modelo de la economía” (Friedman, 79, p. 23). Bajo expectativas racionales los consumidores conocerán las distribuciones de probabilidad de las variables de

estado y su dinámica, así como el modelo (34)–(38). Entonces, los procesos estocásticos para precios de acciones y tipos de interés sobre bonos que los consumidores toman como dados al resolver su problema intertemporal de consumo—inversión, coinciden con los procesos estocásticos que son implicados por la agregación de las decisiones óptimas de los consumidores. Un equilibrio de expectativas racionales consistirá en un conjunto de procesos estocásticos —uno para cada tipo de incertidumbre— y un conjunto de controles óptimos, que satisfacen simultáneamente las condiciones impuestas por la existencia de equilibrio en los distintos mercados del sistema y el programa de optimización intertemporal del consumidor. Sustituyendo (34) en las condiciones necesarias para la optimalidad de una estrategia de consumo—inversión, se obtienen las secuencias de precios y factores de descuento de equilibrio.

Puede extrañar que se defina la existencia de un MS, donde los consumidores se conceden préstamos entre sí a distintos plazos y que luego, ante el supuesto de individuos idénticos, se obtenga que tal mercado no entrará en funcionamiento. El supuesto viene obligado a partir de introducir incertidumbre en el sistema y postular ER: Allen (81), siguiendo los trabajos previos de Grossman (76, 78), Grossman & Stiglitz (76, 80), Bray (81) y Radner (79, 82) ha mostrado que un equilibrio de expectativas racionales que revela toda la información, existirá casi siempre que existan más precios y mercados en la economía que tipos de incertidumbre que puedan afectar a los agentes. El trabajo de Grossman & Stiglitz (80) ilustra el teorema: al introducir “ruido” en un modelo donde existía otro tipo de incertidumbre y sólo un precio, era suficiente para evitar que el precio revelara toda la información disponible.

REFERENCIAS

1. ALCHIAN, A., 74. Information, martingales and prices. *Swedish journal of economics*, march.
2. ARROW, K., 65. *Essays on the theory of risk bearing*. North-Holland.
3. ALLEN, B., 81. Generic existence of completely revealing equilibria for economies with uncertainty when prices convey information. *Econometrica*, 49, p. 1173-99.
4. AZARIADIS, C., 75. Implicit contracts and unemployment equilibria. *Journal of Political Economy*.
5. BARRO, R., 76, Rational expectations and the role of Monetary Policy, *Journal of Monetary Economics*.
6. BEJA, A., 71. The structure of cost of capital under uncertainty. *Review of Economic Studies*, july.
7. BENSOUSSAN ET AL., 74. *Management applications of Modern Control Theory*. North-Holland.
8. BERTSEKAS, D., 76. *Dynamic programming and stochastic Control*. Academic Press.
9. BIERWAG y GROVE, 67. A model of the term structure of interest rates. *Review of Economics and Statistics*, february.
10. BRAY, M., 81. Futures trading, rational expectations and the efficient market hypothesis. *Econometrica*. 49, n. 3.
11. BREEDEN, D., 79. An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. *Journal of Financial Economics*, september.
12. CHIPMAN, J., 73. The ordering of portfolios in terms of mean and variance. *Review of Economic Studies*, may.
13. CHOW, G., 75. *Analysis and control of dynamic economic systems*. Wiley.
14. CHOW, G., 81. *Econometric Analysis by control methods*. Wiley.
15. COOTNER, P., 64. *The random character of stock market prices*. MIT PRESS.
16. CO et AL., 81. A re-examination of the traditional hypothesis about the term structure of interest rates. *JF*, september.
17. CULBERTSON, J., 57. The term structure of interest rates. *Quarterly journal of Economics*, november.
18. DANTHINE, JP., 77. Martingales, market efficiency and commodity prices. *European Economic Review*, 10.
19. DIAMOND y VERRECHIA, 81. Information aggregation in a noisy rational expectations economy. *Journal of Financial Economics*, 9.
20. FAMA, E., 63. Mandelbrot and the stable paretian hypothesis. *Journal of Business*, 36.
21. FAMA, E. 70. Efficient Capital Markets: a review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, 25.
22. FAMA, E., 75. Short term interest rates as predictors of inflation. *American Economic Review*, 65.
23. FAMA, E., 76. *Foundations of Finance*. Basic Books.
24. FAMA y MILLER, 72. *The Theory of Finance*. Holt, Rinehart and Winston.
25. FAMA y ROLL, 68. Some properties of symmetric stable distributions. *J. Amer. Stat. Assoc.*, 66.
26. FELLER, W., 71. *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus aplicaciones*. Limusa-Wiley, 78.

27. FIXHER, I., 30. The theory of Interest. August Mc Kelly.
28. Friedman, B., 79. Optimal expetations and the extreme information assumptions of "rational expectations" macromodels. *Journal of Monetary Economics*, 5.
29. FUTIA, C., 81. Rational Expectations in linear models. *Econometrica*, 49.
30. GOURIEUX ET AL., 82. Rational Expectations in dynamic linear models; analysis of the solutions. *Econometrica*, 50.
31. GRANGER, C., 72. Empirical studies of capital markets: a survey. En Szego y Shell, 72.
32. GRANGER y NEWBOLD, 77. Forecasting Economic Time Series. Academic Press.
33. GROSSMAN, S., 76. On the efficiency of competitive stock markets where traders have diverse information. *JF*, 31, n. 2.
34. GROSSMAN, S., 77. The existence of futures markets, noisy rational expectations and informational externalities. *Review of Economic Studies*, 44.
35. GROSSMAN, S., 78. Further results on the informational efficiency of competitive stock markets, *Journal of Economic Theory*, 18.
36. GROSSMAN y SHILLER, 82. Consumption correlatedness and risk measurement in economies with non-traded assets and heterogeneous information. *Journal of Financial Economics*, 10.
37. GROSSMAN y STIGLITZ, 76. Information and competitive price systems. *American Economic Review*, 66.
38. GROSSMAN y STIGLITZ, 80. The impossibility of informationally efficient markets. *American Economic Review*, 70.
39. HAHN, F., 70. Savings under uncertainty. *Review of Economic Studies*, january.
40. HAKANSSON, N., 70. Optimal investment and consumption strategies under risk for a class of utility functions. *Econometrica*, 38.
41. HALL, R., 78. Stochastic implications of the Life cycle—Permanent income Hypothesis: Theory and evidence. *Journal of Political Economy*, 86, n. 6.
42. HENNING ET AL., 81. Financial Markets and the economy. Prentice-Hall.
43. HICKS, JR., 46. Value and Capital. Oxford.
44. HIRSHLEIFER, J., 70. Investment, interest and Capital. Prentice-Hall.
45. HIRSHLEIFER y RILEY, 79. The analysis of uncertainty and information. An expository survey. *Journal of economic Literature*, 17, December.
46. INTRILIGATOR, M., 71. Optimización matemática y teoría económica. Prentice-Hall Internacional, 73.
47. JENSEN, M., ed., 72. Studies in the theory of Capital Markets. Praeger.
48. KAMIEN y SCHWARTZ, 81. Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management. North-Holland.
49. KARLIN y TAYLOR, 75. A first course in stochastic procesess. Academic Press.
50. KENDALL, M., 76. Time-Series. Griffin.
51. KEYNES, JM., 36. The General Theory of employment, interest and money. Harcourt Brace.
52. KOOPMANS, T., 80. Tres ensayos sobre el estado de la ciencia económica y la conferencia del Nobel. Bosch.
53. Langetieg, T. A multivariate model of the term structure of interest rates. *Journal of Finance*, march.
54. LEROY, S., 73. Risk aversion and the martingale property of stock prices. *International Economic Review*, 14.

55. LEROY, S., 82. Expectations models of assets prices: a survey of theory. *Journal of Finance*, 37, n. 1.
56. LEVHARI y SRINIVASAN, 69. Optimal savins under uncertainty. *Review of Economic Studies*, april.
57. LONG, J., 72. Consumption-investment decisions and equilibrium in the securities market. En Jensen, ed. 72.
58. LONG, J., 74. Stock prices, inflation and the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*. July.
59. LUCAS, R., 72. Expectations and the neutrality of money. *Journal of Economic Theory*, april.
60. LUCAS, R., 78. Assets prices in an excahnge economy. *Econometrica*, november.
61. LUCAS y SARGENT, 81. Rational Expectations. Allen & Urbin.
62. LUTZ, F., 41. The structure of interest rates. *Quarterly journal of Economics*, p. 36-63.
63. MALLIARIS Y BROCK, 82. Stochastic methods in Economics and Finance. North-Holland.
64. MEISELMAN, D., 62. The term structure of interest rates. Prentice-Hall.
65. MERTON, R., 71. Optimun consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, 3.
66. MERTON, R., 73. An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica*, september.
67. MERTON, R., 82. On the mathematics and economics assumptions of continuous-time models. En Sharpe y Cootner, eds., 82.
68. MODIGLIANI y SUTCH, 66. Innovations in interest race policy. *American Economic Review*, may.
69. MODIGLIANI y SHILLER, 73. Inflation, rational expectations and the term structure of interest rates. *Economica*, february.
70. NELSON, CR., 72. The term structure of interest rates. Basic books.
71. NERLOVE et AL., 79. Analysis of economic time-series: A syntesis. Academic Press.
72. O'FLYNN, M. 82. Probabilities, random variables and stochastic procesess. Harper and Row.
73. OHLSON, J., 77. Risk aversion and the martingale property of stock prices: comment. *International Economic Review*, 18, february.
74. OLIVA, M., 84a. Un Ensayo de Teoría Financiera: Reformulación en términos de procesos estocásticos de parámetro discreto. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Barcelona.
75. OLIVA, M., 84 b. La teoría de la Cartera, la toma de decisiones y la moderna Teoría Financiera. Cuadernos de Economía, 32.
76. OSBORNE, M., 59. Brownian motion in the sotck Market. *Operations Research*, 7.
77. PHELPS, ES., 62. The acumulation of risky capital: a sequential utility analysis. *Econometrica*, 30, october.
78. POLAKOFF y DURKIN, 81. Financial Institutions and Markets. Houghton Mifflin.
79. PRATT, J., 64. Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica*, 32.
80. PRESCOTT y MEHRA, 80. Recursive competitive equilibrium: the case of homogeneous households. *Econometrica*, 6.
81. PRIESTLEY, MB., 81. Spectral analysis and time series. Academic Press.
82. RADNER, R., 72. Existence of equilibrium of plans, prices and price expecta-

- tions in a sequence of markets. *Econometrica*, 40.
83. RADNER, R., 79. Rational expectations equilibrium: generic existence and the information revealed by prices. *Econometrica*, 47.
 84. RICHARD y SUNDARESAN, 81. A continuous time model of forward prices and futures prices in a multigood economy. *Journal of Financial Economics*.
 85. ROLL, R., 70. The behavior of interest rates. Basic books.
 86. RUBINSTEIN, M., 75. Securities market efficiency in a Arrow-Debreu Economy. *American Economic Review*, december.
 87. RUBINSTEIN, M., 76a. The strong case for the generalized logarithmic utility model as the premier model of Financial Markets. *Journal of Finance*, may.
 88. RUBINSTEIN, M., 76b. The valuation of uncertain income streams and the pricing of options. *The bell journal of economics*, 7, autumn.
 89. SAMUELSON, PA., 65. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial management review*, 6.
 90. SAMUELSON, PA., 69. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming. *Review of Economics and Statistics*, 51.
 91. SARGENT, T., 72. Rational expectations and the term structure of interest rates. *Journal of money, credit and banking*, 4, n. 1.
 92. SARGENT, T., 79. *Macroeconomic Theory* Academic Press.
 93. SHARPE y COOTNER, eds., 82. *Essays in honor of Paul Cootner*. Prentice-Hall.
 94. SHILLER, R., 78. Rational Expectations and the dynamic structure of Macroeconomic Models: A critical review. *Journal of Monetary Economics*, 4.
 95. SHILLER, R., 79. The volatility of long term interest rates and expectations models of the term structure. *Journal of Political Economy*, 87, n. 6.
 96. SINGLETON, K., 80. Expectations models and implied variance bounds. *Journal of Political Economy*, 88, n. 6.
 97. STIGLITZ, J., 82. *Information and Capital Markets*. En Sharpe y Cootner, eds.
 98. SZEGO y SHELL, eds., 72. *Mathematical methods in investment and Finance*. North-Holland.
 99. TELSER, LG., 67. A critique of some recent empirical research on the explanation of the term structure of interest rates. *Journal of Political Economy*, 75, n. 4.
 100. THOMAS, J., 71. *Applied probability and random processes*. Krieger.
 101. TOBIN, J., 58. Liquidity preference as behavior toward risk, *Review of Economic Studies*, 26.
 102. TOBIN, J., 69. Comment on Borch and Feldstein. *Review of Economic Studies*, january.
 103. VACISEK, O., 77. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5. november.
 104. VAN HORNE, JC., 78. *Financial markets, rates and Flows*. Prentice-Hall.
 105. VERRECHIA, R., 80. Consensus beliefs, information acquisition and market efficiency. *American Economic Review*, 70, december.
 106. WILLIAMS, JB., 38. *The theory of investment value*. North-Holland.
 107. YAAARI, M., 65. Uncertain lifetime, life insurance and the theory of consumer. *Review of Economics and Statistics*, april.
 108. ZIEMBA y VICKSON, eds., 75. *Stochastic optimization models in Finance*. Academic Press.